І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ІСЗЗІ
2017 р.

Перший курс

1. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, знаючи, що $A(4;-1)$ - одна з його вершин, а $x=1$ та $x-y=1$ - рівняння бісектрис.

2. Знайти границю добутку
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}2^{\frac{1}{k(k+1)}},$$
де $\prod_{k=1}^{n}2^{\frac{1}{k(k+1)}}=2^{\frac{1}{1\cdot2}}\,2^{\frac{1}{2\cdot3}}\,2^{\frac{1}{3\cdot4}}\ldots2^{\frac{1}{(n-1)n}}\,2^{\frac{1}{n(n+1)}}$.

3. Знайти похідну $y^{(2017)}$, де
$$y=(x^2+1)\cos 2x.$$

4. Побудувати графік функції
$$y=x^{\frac{1}{x-1}}.$$

5. Функцію $f:[0;1]\to R$ задано формулою
$$f(x)=\begin{cases}1,\ при\ x=0;\\ x,\ при\ x\in(0;1);\\ 0,\ при\ x=1.\end{cases}$$
Чи існує така функція $g:[0;1]\to[0;1]$, що $g(g(x))=f(x)$ для всіх x ?
Якщо так, наведіть приклад такої функції, якщо ні – доведіть це.

6. Назвемо набір з нулів та одиниць *правильним*, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць – непарну. Наприклад, набори 001000011100 та 111110010000 є правильними, а набір 111001111101 – неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/

І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
ІСЗЗІ
2017 р.

Старші курси

1. Задана матриця

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{4}{n} \\ \frac{2}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'\cos y = x - \sin y.$$

3. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

   в точці $x_0=0$.

4. Розклавши в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=x(\pi-x)$$

   на $(0;\pi)$ за синусами, знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

5. Для яких $\alpha\in R$ існує така *неперервна* функція $g:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, що $g(g(x))=x^{\alpha}$ для всіх x? Відповідь обгрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень α, для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

6. Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри з множини $\{0,1,\ldots,9\}$, обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число, утворене з *усіх* написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши $3\,8\,3\,7\,6\,8\,1$, оскільки $3837681=1959\times1959$.) Позначимо через p ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що $p>\frac{1}{2}$.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua/